

Жусупова Динара Серикжановна

Алгебралық теңдеулер жүйелерін шешуді параллельдеудің кейбір есептері

**6D060100 - математика мамандығы бойынша философия докторы (PhD) ғылыми дәрежесін алу үшін дайындалған диссертациясына
АННОТАЦИЯ**

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. XX ғасырдың 50 -ші жылдардан бастап, есептеу әдістері бірталай қарқынды дамуда. Бұл әсіресе сызықты алгебралық жүйелерді шешуге арналған жоғары деңгейдегі бағдарламалардың пайда болуымен сипатталады. Мысал ретінде EISPACK пен LINPACK бағдарламалар жинақтарының көптеген қолданбалы есептерде кең қолданылуы жоғары деңгейлі бағдарламалардың жазылуына үлес қосты. Аталған бағдарламалар жинақтарындағы бөлек модульдерді пайдалана отырып, ғалымдар мен инженерлер айналысқан мәселелеріне сәйкес күрделі бағдарламалық құралдарды құрастырады.

Үлкен сызықты алгебралық теңдеулер жүйелерін шешу мәселесі соңғы үлгідегі қуатты есептеу техниканың пайдалануы максималды тиімділігін әкелетін мәселелерге жатады. Кейбір жағдайда есептің параметрлері өте үлкен болып, бір процессорлы компьютер жадының сыйымдылығына немесе жұмсалатын уақытқа байланысты шешу мүмкін емес болғанда, есептеулерді жүргізуде параллель алгоритм құру қажеттілігі туындайды. Бұндай мәселелер ғылымның әр түрлі салаларында пайда болады: кванттық физика (элементар бөлшектердің физикасы, ядрлік физика, өрістің кванттық теориясы), молекулалар физикасы, кванттық химия, биология, экология, Жер туралы ғылымдарда (атмосфера физикасы, метеорология, климатология, мұхит физикасы), экономика және эконометрия (есептеу экономикасы, макроэкономика, тиімді басқару теориясы), математикалық лингвистика (дауысты тану), информатика (мәліметтер базасын енгізу, бейнелерді тану), әлеуметтік ғылымдар, гидродинамика, газодинамика, медицина, фармацевтика және т. с. с. Параллель жүйелерді пайдалану арқылы бұрын өте көп уақытты жұмсайтын есептеулер бүгінгі күні белгілі бір шектеулі уақытты алатын болды. Тізбектелген алгоритмді көп процессорлы жүйеге қою көп жағдайда есептің шешілуін жеделдетуге әкелмейді. Бұл жағдайда жүйенің архитектуралық құрылысын ескеріп, арнайы параллель алгоритм құру жөн. Әсіресе, дискретті математиканың сандық қатарлар, комбинаторлық есептер, сызықты алгебра, тордың түйіндеріндегі мәндерді есептеу, графтарды өңдеу сияқты есептерді шешуде параллель алгоритмдер жиі қолданысқа ие. Қазіргі кезде ең қуатты суперкомпьютер АҚШ-тың Калифорнияда Lawrence Livermore National Laboratory (LLNL) орналасқан. Оның аталуы El Capitan, оның қуаты - 1,742 EFlop/s

немесе секундына 1,742 квинтиллион үтірі жылжымалы болатын операцияларды орындай алады. Архитектурасы 11 миллионнан астам ядролардан құрылған. El Capitan АҚШ-тың ядролық арсеналын модельдеу және қорғау үшін, сондай-ақ жоғары энергия физикасындағы зерттеулер мен жаңа материалдарды әзірлеу үшін пайдаланылады.

2000 жылдардың басында графикалық процессорлар параллельді есептеулер үшін қолданыла бастады. Графикалық өңдеу блоктары (GPU) мыңдаған параллель ядролардың арқасында үлкен сызықтық теңдеулер жүйесін шешуді айтарлықтай жылдамдатады. Орталық процессорлардан айырмашылығы, олар өткізу қабілеттілігі жоғары жадты (HBM, GDDR6) пайдалана отырып, үлкен матрицалар мен векторларды тиімді өңдейді. GPU сызықтық алгебра әдістерінде (LU декомпозициясы, QR, түйіндес градиент әдісі) пайдаланылады және CUDA (NVIDIA) және ROCm (AMD) арқылы жүзеге асырылады.

Зерттеу жұмысының мақсаты. Сызықты алгебралық және сызықты емес алгебралық теңдеулер жүйелерін жуықтап шешу үрдісінің параллель есептеу әдістерін құру.

Зерттеу жұмысының нысандары. Сызықты алгебралық теңдеулер жүйелері, сызықты емес алгебралық теңдеулер жүйелері.

Зерттеудің теориялық және әдістемелік негізі. Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін жуықтап шешу әдісін құрастыруда

$$Ax = f$$

теңдеуді жуықтап шешу мәселесі оған эквивалентті

$$J(x) = |Ax - f|^2$$

функционалды минимизациялау есебіне көшу әдісі пайдаланылған. Көп жағдайда

$$Ax = f$$

теңдеуінің нақты шешімін табудан гөрі

$$|Ax - f|$$

мәнін кішірейту тиімді болады. Осы ұстанымға сай A матрицасы шенелген және қайтымды жағдай үшін жуықтап шешу вариациялық әдісі диссертациялық жұмыста келтірілген. Ал A нашар шартталған (яғни қайтымды емес немесе меншікті мәндері өте аз шама болатын жағдайда) Тихоновтың $\varepsilon \geq 0$ саны үшін келесі функционалы

$$J_\varepsilon(x) = |Ax - f|^2 + \varepsilon|x|^2$$

қолданылған. Бұл жағдайда егер A матрицасының кері операторы болмаса, онда бірнеше шешімдердің ішінде нормасы ең аз болатын шешімді іздеу әдісі келтірілген.

Зерттеу жұмысының ғылыми жаңалығы. Диссертациялық жұмыста алынған ғылыми нәтижелердің жаңалығы алгебралық теңдеулер жүйелерін жуықтап шешу үрдісін параллель есептеу алгоритмдеріне сәйкес құрастыруы болып табылады.

Зерттеу жұмысының теориялық және тәжірибелік маңызы. Диссертациялық жұмыс нәтижелерінің теориялық және практикалық маңызы бар. Алынған нәтижелерді пайдаланып, сызықты алгебралық жүйелерді матрицасы қайтымды немесе нашар шартталған жағдайда параллель есептеуге болады, сонымен қатар сызықты емес алгебралық жүйені параллельдеудің де алгоритмі келтірілген.

Жарияланымдар.

1. M. Otelbaev, Ya. T. Sultanaev, D. Zhussupova. Criterion for the Boundedness and Compactness of a Class of Sets in $L[0;1)$ // Differential Equations.-2019.- V. 55, №9. – P. 1301-1304.
<https://doi.org/10.1134/S0012266119090131>
(Web of Science Q2, CiteScore2019=1.0, процентиль 48)
2. D. Zhussupova, M. Otelbaev, S. Burgumbayeva. Modeling Gas Compressor Station Operation to Minimize Fuel Costs for Surge Zone Protection, International Journal of Rotating Machinery, vol. 2024, Article ID 5560308, 18 pages, 2024.
<https://doi.org/10.1155/2024/5560308>
(Web of Science Q4, CiteScore2023=2.4, процентиль 46)
3. Otelbaev M., Tuleuov B., Zhussupova D. On a Method of Finding Approximate Solutions of Ill-conditioned Algebraic Systems and Parallel Computation// Eurasian Mathematical Journal, Vol.2, №1, 2011, pp.149-151.
(Web of Science Q1, CiteScore2024=1.8, процентиль 67)
4. Otelbaev M., Tuleuov B., Zhussupova D. On a Parallel Computation Method for Solving Linear Algebraic System with Ill-Conditioned Matrix //TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics. -2013. -V. 4. - No. 2. - p. 115 - 124.
(Web of Science Q1)
5. Жусупова Д. Сызықты емес теңдеуді шешудің параллельдеу әдісі // Вестник ЕНУ, серия естественно-технических наук. – Астана: ЕНУ, 2013.- №4(95), С.-113-116

6. Отелбаев М., Тулеуов Б., Жусупова Д. Один метод распараллеливания процесса решения нелинейных алгебраических систем// совм. выпуск Вестник ВКГТУ им. Д. Серикбаева, Вычислительные технологии. - 2013.- ч. 1.- С. 233-236.
7. Burgumbayeva, S., Zhussupova, D., & Koshkarova, B. (2024). Mathematical modelling of the process of natural gas transportation via pipe networks using crossing branch method. *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*, 121(1), 12–26.
<https://doi.org/10.26577/JMMCS202412112>
8. Отелбаев М., Жусупова Д., Тулеуов Б. Распараллеливание линейной алгебраической системы с обратимой матрицей//Вестник Башкирского университета.-2011.-т.16.-№4.-с.1129-1133.
9. Otelbaev M., Tuleuov B., Zhussupova D. *Proceedings of the World Congress on Engineering*, 2013. Vol. 1, -P. 54-58
10. Д. Жусупова, М. Отелбаев. Один метод приближенного решения системы линейных алгебраических уравнений с плохо обусловленной матрицей. *Современные методы математической физики и их приложения: тезисы докладов республиканской научной конференции.-Ташкент, 2015 г., стр. 60*
11. S. Burgumbayeva, D. Zhussupova. Minimizing compressor fuel cost on large natural gas pipeline transmission networks. 6th International Conference of Mathematical Sciences ICMS 2022) 20–24 July 2022 Istanbul, Turkey
<https://doi.org/10.1063/5.0175663>
12. Жусупова Д., Абдикаликова З., Ыдырыс А., Бургумбаева С. Моделирование работы газокomppressorной станции для минимизации затрат топлива на защиту от помпажной зон. Сборник трудов конференции Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения, 23-25 ноября - 2023, Ташкент.
13. D. Zhussupova, Z. Abdikalykova. Modeling the operation of a gas compressor station to minimize fuel costs for protection against surge zone. *APMAS-2024 Conf. Proc. October 2024*

Зерттеу жұмысының құрылымы. Диссертациялық жұмыс 5 бөлімнен (әр бөлім бөлімшелерге бөлінген), кіріспеден, қорытындыдан, әдебиеттер тізімі мен қосымшалардан құрылады. Барлығы беттер саны - 81.